

增,在 $(-1,0)$ 上单调递减,此时 $f(x)_{\max}=f(-1)=1$ ,由于偶函数的图象关于 $y$ 轴对称,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,此时 $f(x)_{\max}=f(1)=f(-1)=1$ ,故 $f(x)$ 的最大值为1,故A正确,B正确;

当 $x \leq 0$ 时,令 $f(x) = -x^2 - 2x \geq 0$ ,解得 $-2 \leq x \leq 0$ ,当 $x > 0$ 时,令 $f(x) = -x^2 + 2x \geq 0$ ,解得 $0 < x \leq 2$ ,所以 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2,2]$ ,故C正确. 故选ABC.

9. -2 【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数,函数 $g(x)$ 是偶函数,且 $f(x)+g(x)=x^2-x+1$ ①,

所以 $f(-x)+g(-x)=(-x)^2-(-x)+1$ ,即 $-f(x)+g(x)=x^2+x+1$ ②,联立①②得 $f(x)=-x$ , $g(x)=x^2+1$ ,故 $f(2)=-2$ .

10.  $-2x^2+4$  【解析】 $\because$  函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$ 是偶函数, $\therefore 2a+ab=0$ ,即 $a(b+2)=0$ , $\therefore a=0$ 或 $b=-2$ . 又函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$ , $\therefore b < 0$ ,且 $2a^2=4$ ,即 $a^2=2$ , $b=-2$ .  $\therefore$  该函数的解析式为 $f(x)=-2x^2+4$ .

11. 【解】(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,且 $x_1 < x_2$ ,则 $x_2 - x_1 > 0$ ,

因为当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ ,所以 $f(x_2 - x_1) < 0$ ,

则 $f(x_2) - f(x_1) = f((x_2 - x_1) + x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) < 0$ ,

即 $f(x_1) > f(x_2)$ ,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(2)令 $x=y=0$ ,得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$ ,所以 $f(0)=0$ .

令 $y=-x$ ,得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=f(0)=0$ ,

所以 $f(-x)=-f(x)$ ,所以 $f(x)$ 为奇函数.

因为 $f(4)=-2$ ,所以 $f(4)=2f(2)=-2$ ,所以 $f(2)=-1$ ,

所以 $f(-2)=-f(2)=1$ .

因为 $f(x^2-2x) > f(2-x)+1=f(2-x)+f(-2)=f(-x)$ ,所以 $f(x^2-2x) > f(-x)$ ,

又由(1)知, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $x^2-2x < -x$ ,

即 $x^2-x < 0$ ,即 $0 < x < 1$ ,

所以不等式 $f(x^2-2x) > f(2-x)+1$ 的解集为 $(0,1)$ .

**高手视角** (1)根据函数的单调性的定义进行判断并证明即可.(2)利用赋值法和函数的奇偶性求出 $f(-2)=1$ ,再根据已知等式,结合函数的单调性及一元二次不等式的解法进行求解即可.

## 易错专刷

### 易错点1 判断函数的奇偶性时忽视定义域致误

12. D 【解析】函数 $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ 的定义域满足 $\frac{2-x}{x+2} \geq 0$ ,解得 $-2 < x \leq 2$ ,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2]$ ,定义域不关于原点对称,因此函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

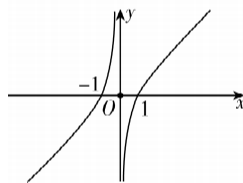
### 易错警示

求解本题的易错之处是忽略函数的定义域,将

函数化简变形为 $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}=\sqrt{(x+2)^2 \cdot \frac{2-x}{x+2}}=\sqrt{4-x^2}$ ,从而判断出该函数是偶函数. 因此在判断函数的奇偶性时,化简函数解析式一定要等价变形,不能扩大或缩小函数的定义域.

### 易错点2 求解与奇、偶函数有关的不等式时未进行等价转化致误

13. A 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(-1)=0$ ,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增, $f(-1)=-f(1)=0$ , $f(0)=0$ ,作出 $f(x)$ 图象的草图如图所示.



由图象知, $f(2x-1) > 0$ 等价于 $-1 < 2x-1 < 0$ 或 $2x-1 > 1$ ,解得

$0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ ,所以不等式 $f(2x-1) > 0$ 的解集为

$(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ . 故选A.

### 易错警示

求解与奇、偶函数有关的不等式问题,要考虑奇、偶函数关于原点对称的定义域两侧图象的单调性. 本题的易错之处是只考虑 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的性质,而忽视 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增,造成错解. 为避免此类问题的发生,可根据函数的奇偶性、单调性作出函数的草图,根据图象将不等式转化,脱去“ $f$ ”,解出即可.

## 3.3 幂函数

### 基础必刷

1. B 【解析】对于A, $y=2x$ 不是幂函数,故不符合要求;

对于B, $y=x^2$ 是幂函数,且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合要求;

对于C, $y=\sqrt{2x}=\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$ 中 $x^{\frac{1}{2}}$ 的系数不为1,故 $y=\sqrt{2x}$ 不是幂函数,不符合要求;

对于D, $y=\frac{2}{x}=2x^{-1}$ 中 $x^{-1}$ 的系数不为1,故 $y=\frac{2}{x}$ 不是幂函数,不符合要求. 故选B.

2. D 【解析】由题意得 $m^2-5m+5=1$ ,解得 $m=1$ 或 $m=4$ .

**重点:** 可利用 $x^a$ 的系数为1求解参数

当 $m=1$ 时, $f(x)=x^2$ ,是偶函数,不符合题意;当 $m=4$ 时, $f(x)=x^5$ ,是奇函数,符合题意. 故选D.

3. A 【解析】当 $x > 1$ 时,幂函数 $y=x^a$ 的图象自上而下所对应

的幂指数  $\alpha$  逐渐减小, 所以与曲线  $C_1, C_2, C_3, C_4$  相对应的  $\alpha$  依

→ **圈重点:** 简记为“指大图高”

次为  $3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -3$ . 故选 A.

4. C 【解析】 $a = 2^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$ , 因为  $y = x^{\frac{1}{3}}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $4 > 3$ , 所以  $4^{\frac{1}{3}} > 3^{\frac{1}{3}}$ , 即  $a > c$ . 因为  $b^{15} = (4^{\frac{1}{5}})^{15} = 4^3 = 64$ ,  $c^{15} = (3^{\frac{1}{3}})^{15} = 3^5 = 243$ , 且  $64 < 243$ , 所以  $b^{15} < c^{15}$ , 所以  $c > b$ , 所以  $b < c < a$ . 故选 C.

→ **拆逻辑:** 化为底数不同, 指数相同的形式, 再利用幂函数的单调性比较大小

5. C 【解析】当  $\alpha \leq 0$  时, 幂函数的图象不过点  $(0, 0)$ , 故 A 错误; 当  $\alpha = 1$  时, 幂函数的图象经过第三象限, 故 B 错误; 当  $\alpha = 1$ , 幂函数为  $y = x$ , 是其定义域上的增函数, 当  $\alpha = 3$ , 幂函数为  $y = x^3$ , 是其定义域上的增函数, 当  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 幂函数为  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , 是其定义域上的增函数, 故 C 正确; 若幂函数的图象过点  $(\frac{1}{4}, 8)$ , 则  $8 = (\frac{1}{4})^\alpha$ , 解得  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , 所以幂函数为  $y = x^{-\frac{3}{2}}$ , 当  $x = 9$  时,  $y = \frac{1}{27}$ , 幂函数  $y = x^{-\frac{3}{2}}$  的图象不过点  $(9, \frac{1}{18})$ , 故 D 错误. 故选 C.

6. 32 【解析】由题可设  $f(x) = x^\alpha$ , 则  $f(2) = 2^\alpha = 2^{-4}$ , 所以  $\alpha = -4$ , 即  $f(x) = x^{-4}$ , 所以  $f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{-4} + (-\frac{1}{2})^{-4} = 2^4 + 2^4 = 32$ .

7. 【解】(1) 因为  $f(x)$  是幂函数, 所以  $m^2 - 3m - 3 = 1$ , 即  $m^2 - 3m - 4 = 0$ , 即  $(m-4)(m+1) = 0$ , 解得  $m = 4$  或  $m = -1$ . 当  $m = 4$  时,  $f(x) = x^3$ , 定义域为  $\mathbf{R}$ , 此时  $f(-x) = -x^3 = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  是奇函数, 所以  $m = 4$  符合题意; 当  $m = -1$  时,  $f(x) = x^{-2}$ , 定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 关于原点对称, 此时  $f(-x) = x^{-2} \neq -f(x)$ , 所以  $f(x)$  不是奇函数, 所以  $m = -1$  不符合题意. 故  $f(x) = x^3$ . (2) 由 (1) 可知  $m = 4$ , 所以不等式  $(3a-3)^{m-1} < (a^2-a)^{m-1}$ , 即不等式  $(3a-3)^3 < (a^2-a)^3$ . 因为  $y = x^3$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数, 所以  $3a-3 < a^2-a$ , 即  $a^2-4a+3 > 0$ , 即  $(a-1)(a-3) > 0$ , 解得  $a > 3$  或  $a < 1$ , 因此  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

#### 易错专刷

#### 易错点 1 忽视幂函数的定义特征而致误

8. A 【解析】根据幂函数的定义可得  $k = 1$ .

由函数  $f(x) = k \cdot x^\alpha$  的图象经过点  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

可得  $\frac{\sqrt{2}}{2} = (\frac{1}{2})^\alpha$ , 解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $k - \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . 故选 A.

**易错警示** 本题的易错之处是忽视幂函数的定义, 不能正确确定  $k$  的值. 因此确定一个函数为幂函数时, 一定要满足以下三个条件: (1) 幂指数  $\alpha$  为常数; (2) 底数为自变量; (3)  $x^\alpha$  的系数为 1.

#### 易错点 2 求解与幂函数性质有关的解析式时, 忘记检验是否满足性质而致误

9. B 【解析】因为函数  $f(x) = (m^2 - m - 5)x^{-2m+1}$  既是幂函数又在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $\begin{cases} m^2 - m - 5 = 1, \\ -2m + 1 < 0, \end{cases}$  解得  $m = 3$ , 此时  $f(x) = x^{-5}$ , 满足题意. 故选 B.

10. 3 或 -3 【解析】因为  $f(x)$  是幂函数, 所以  $m^3 - 9m + 1 = 1$ , 解得  $m = 0$  或  $m = \pm 3$ . 当  $m = 0$  时,  $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$ , 是奇函数, 图象不关于  $y$  轴对称, 不符合题意; 当  $m = 3$  时,  $f(x) = x^{-\frac{2}{8}}$ , 定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 关于原点对称, 又  $f(x) = f(-x)$ , 所以  $f(x)$  为偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 符合题意; 当  $m = -3$  时,  $f(x) = x^{-10}$ , 是偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 符合题意.

**易错警示** 在第 9 题中, 如果只考虑  $m^2 - m - 5 = 1$ , 解得  $m = -2$  或  $m = 3$ , 当  $m = -2$  时, 函数为  $y = x^5$ , 不满足在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 因此应舍去; 在第 10 题中, 当  $m = 0$  时,  $f(x)$  不是偶函数, 不满足要求, 因此也应舍去. 所以涉及含参数的幂函数问题时, 要注意检验是否满足题中幂函数的性质.

#### 易错点 3 不能正确分析幂函数的单调性而致误

11. 【解】 $\because y = x^{m^2-2m-3}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore m^2 - 2m - 3 < 0$ , 解得  $-1 < m < 3$ . 又  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $\therefore m = 0, 1, 2$ .  $\therefore$  函数图象关于  $y$  轴对称,  $\therefore$  只有  $m = 1$  满足题意.  $\therefore (a+1)^{-\frac{m}{3}} < (3-2a)^{-\frac{m}{3}}$ , 即  $(a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3-2a)^{-\frac{1}{3}}$ . 又  $\because y = x^{-\frac{1}{3}}$  在  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore a+1 > 3-2a > 0$  或  $3-2a < a+1 < 0$  或  $a+1 < 0 < 3-2a$ , 解得  $a < -1$  或  $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$ . 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1) \cup (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ .

**易错警示** (1) 函数  $y = x^{-\frac{1}{3}}$  在  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  上单调递减, 易误认为在定义域内是减函数从而得出  $a+1 > 3-2a$ , 即  $a > \frac{2}{3}$  的错误结论.

(2) 由  $f(x_1) < f(x_2)$  得  $x_1$  与  $x_2$  的大小关系时, 如果  $f(x)$  的单调区间不止一个, 那么需要对  $x_1, x_2$  的范围进行讨论, 这时可借助函数  $y = f(x)$  的图象直观地进行分析, 得出结果.

### 3.4 函数的应用 (一)

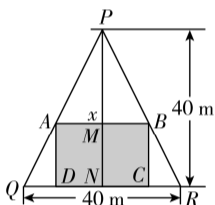
**1. B** 【解析】设小王每个月的用水量为  $x$  吨, 费用为  $y$  元, 则  $y = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 15, \\ 3 \times 15 + 5(x - 15), & x > 15, \end{cases}$  即  $y = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 15, \\ 5x - 30, & x > 15. \end{cases}$  当  $y = 70$  时,  $x = 20$ , 所以小王 10 月份的实际用水量为 20 吨. 故选 B.

**2. C** 【解析】设  $f(a)$  为  $a$  与其前三个月的市场收购价格之差的平方和, 则  $f(a) = (a - 71)^2 + (a - 72)^2 + (a - 70)^2 = 3(a - 71)^2 + 2$ . 当  $a = 71$  时,  $f(a)$  最小, 所以 7 月份该农产品的市场收购价格应为 71 元/担. 故选 C.

**3. D** 【解析】设某地的耕地面积每年减少  $x\%$ , 因为在最近 50 年内减少了 20%, 所以  $(1 - x\%)^{50} = 1 - 20\%$ , 所以  $(1 - x\%)^5 = 0.8^{\frac{1}{10}}$ , 由题意得 2029 年的耕地面积为  $m(1 - x\%)^5$ , 即  $0.8^{\frac{1}{10}}m$ . 故选 D.

**4. 20** 【解析】如图, 设锐角三角形为  $\triangle PQR$ , 其内接矩形为  $ABCD$ , 过点  $P$  作  $PN \perp QR$  交  $QR$  于点  $N$ ,  $PN$  与  $AB$  交于点  $M$ , 则  $AB = x$  m, 设  $AD = y$  m, 由矩形性质可得  $AB \parallel CD$ , 则  $\triangle PAB$  与  $\triangle PQR$  相似,  $\triangle PMB$  与  $\triangle PNR$  相似, 则  $\frac{PB}{PR} = \frac{AB}{QR} = \frac{x}{40}$ ,  $\frac{PM}{PN} = \frac{PB}{PR} = \frac{40 - y}{40}$ , 即  $\frac{x}{40} = \frac{40 - y}{40}$ , 即  $y = 40 - x$ , 则矩形  $ABCD$  的面积  $S = xy = x(40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400$ ,  $0 < x < 40$ , 则当  $x = 20$  m 时, 矩形面积最大.

**逻辑:** 利用相似表示出  $y$  和  $x$  的关系后可表示出  $S$  和  $x$  的关系, 注意自变量  $x$  的范围



**5. 10** 【解析】由题意, 设该厂日获利为  $y$  元, 则  $y = (160 - 2x)x - (100 + 30x) = -2x^2 + 130x - 100, x \in \mathbf{N}^*$ . 当工厂日获利不少于 1 000 元时,  $-2x^2 + 130x - 100 \geq 1\,000$ , 即  $x^2 - 65x + 550 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - 55) \leq 0$ , 解得  $10 \leq x \leq 55, x \in \mathbf{N}^*$ .

故该厂日获利不少于 1 000 元时, 日产量最少是 10 件.

**6. 【解】** (1) 由题意得  $W(x) = f(x)g(x) = \left(5 + \frac{2}{x}\right)(550 - 170 -$

$$3x) = \begin{cases} 15x + \frac{960}{x} + 2\,406, & 1 \leq x \leq 23, x \in \mathbf{N}^*, \\ -15x + \frac{1\,240}{x} + 3\,094, & 24 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

(2) (i) 当  $1 \leq x \leq 23, x \in \mathbf{N}^*$  时,  $W(x) = 15x + \frac{960}{x} + 2\,406 \geq$

$2\sqrt{15 \times 960} + 2\,406 = 2\,646$ , 当且仅当  $x = 8$  时取等号;

(ii) 当  $24 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$  时,  $W(x) = -15x + \frac{1\,240}{x} + 3\,094$ ,

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in [24, 30], \text{ 且 } x_1 > x_2, \text{ 则 } W(x_1) - W(x_2) \\ &= \left(-15x_1 + \frac{1\,240}{x_1} + 3\,094\right) - \left(-15x_2 + \frac{1\,240}{x_2} + 3\,094\right) \\ &= -15(x_1 - x_2) + 1\,240\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= 15(x_2 - x_1) + 1\,240 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= (x_2 - x_1) \left(15 + \frac{1\,240}{x_1 x_2}\right), \end{aligned}$$

因为  $24 \leq x_2 < x_1 \leq 30$ , 所以  $x_2 - x_1 < 0, x_1 x_2 > 0$ ,

因此  $W(x_1) - W(x_2) < 0$ , 故  $W(x)$  在  $[24, 30]$  上单调递减,

$$\text{此时 } W(x)_{\min} = W(30) = 2\,644 + \frac{124}{3} > 2\,646,$$

故该景区旅游日收益的最小值为 2 646 万元.

### 专题 函数的性质及应用

**1. B** 【解析】已知  $x_1 < 1 < x_2$  且  $x_1 + x_2 > 2$ , 所以  $1 - x_1 < x_2 - 1$ , 即  $|x_1 - 1| < x_2 - 1$ , 又  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称且在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x_2) > f(x_1)$ , A 错误. 因为  $x_1 + x_2 > 2$ , 所以  $x_2 > 2 - x_1$ . 因为  $x_1 < 1 < x_2$ , 所以  $1 < 2 - x_1 < x_2$ , 又函数  $f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以

**重点:** 注意自变量需在同一单调区间上

$f(x_2) > f(2 - x_1)$ , B 正确, D 错误. 因为  $x_2 > 1$  且  $x_1 + x_2 > 2$ , 所以  $2 - x_2 < 1, 2 - x_2 < x_1 < 1$ , 又  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 所以  $f(2 - x_2) > f(x_1)$ , C 错误. 故选 B.

**2. B** 【解析】因为函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & x < -1, \\ x^2 - 2ax + 5, & x \geq -1 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函

数, 所以  $\begin{cases} a < 0, \\ a \leq -1, \\ -a \leq 1 + 2a + 5, \end{cases}$  解得  $-2 \leq a \leq -1$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $[-2, -1]$ . 故选 B.

**3. D** 【解析】因为  $f(x)$  为奇函数, 所以  $F(x) - 5 = af(x) + bx$  也为奇函数.

$F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有最大值 12, 所以  $F(x) - 5 = af(x) + bx$  在  $(0, +\infty)$  上有最大值 7,

所以  $F(x) - 5$  在  $(-\infty, 0)$  上有最小值 -7, 可得  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上有最小值 -2. 故选 D.

**4. C** 【解析】因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $g(x) = xf(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(0) = 0$ ,

又  $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$ , 所以  $g(x)$  是偶函数.

又  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 所以当  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ ,

设  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $0 < f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$ , 即  $g(x_1) < g(x_2)$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $g(1) < g(2) < g(3)$ , 又  $g(2) = g(-2)$ , 所以  $g(1) < g(-2) < g(3)$ , 即  $b < a < c$ . 故选 C.

**5. D** 【解析】若函数  $f(x) = x^3 - 3x^2$  图象的对称中心为  $(m, n)$ , 则  $y = f(x+m) - n$  为奇函数, 即  $y = (x+m)^3 - 3(x+m)^2 - n = x^3 + (3m-3)x^2 + (3m^2-6m)x + m^3 - 3m^2 - n$  为奇函数, 所以  $(-x)^3 + (3m-3) \cdot (-x)^2 + (3m^2-6m) \cdot (-x) + m^3 - 3m^2 - n = -[x^3 + (3m-3)x^2 + (3m^2-6m)x + m^3 - 3m^2 - n]$ , 所以  $(3m-3)x^2 + m^3 - 3m^2 - n = 0$  恒成立, 所以  $3m-3=0$  且  $m^3-3m^2-n=0$ , 解得  $m=1, n=-2$ , 所以  $f(x)$  的图象的对称中心为  $(1, -2)$ , 即有  $f(x) + f(2-x) = -4$ , 所以  $f(2.025) + f(-2.023) = -4, f(2.024) + f(-2.022) = -4, \dots, f(2) + f(0) = -4, f(1) = -2$ , 所以  $f(2.025) + f(2.024) + \dots + f(1) + f(0) + f(-1) + f(-2) + \dots + f(-2.022) + f(-2.023) = [f(2.025) + f(-2.023)] + [f(2.024) + f(-2.022)] + \dots + [f(2) + f(0)] + f(1) = -4 + (-4) + \dots + (-4) + (-2) = -4 \times 2.024 + (-2) = -8.098$ . 故选 D.

**6. ACD** 【解析】由题意可设  $f(x) = x^a$ , 由  $f(2) = 4$ , 得  $2^a = 4$ , 解得  $a=2$ , 则  $f(x) = x^2$ .

对于 A,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = (-x)^2 = f(x)$ , 则  $f(x)$  为偶函数, A 正确;

对于 B,  $-3 < 1$ , 此时  $f(-3) = 9 > 1 = f(1)$ , B 错误;

对于 C,  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4} \leq \frac{2x_1^2+2x_2^2}{4} =$

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ , 当且仅当  $x_1=x_2$  时取等号, C 正确;

对于 D,  $f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$ , 由选项 C 知,  $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \leq$

$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{1}{2}$ , 解得  $-\sqrt{2} \leq x_1+x_2 \leq \sqrt{2}$ , D 正确. 故选 ACD.

**7.  $\left[\frac{7-\sqrt{41}}{4}, 1\right]$**  【解析】由题意知, 当  $x \in (0, 2]$  时,  $f(x) =$

$\begin{cases} x^2-x, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$  可得  $f(x) \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,

又由  $f(x+2) = 2f(x)$ , 可得当  $x \in (2, 4]$  时,  $f(x) \in$

$\left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup [1, 2]$ ,

当  $x \in (0, 4]$  时,  $t^2 - \frac{7t}{2} \leq f(x) \leq 3-t$  恒成立,

等价于  $\begin{cases} t^2 - \frac{7t}{2} \leq f(x)_{\min}, \\ f(x)_{\max} \leq 3-t, \end{cases}$  即  $\begin{cases} t^2 - \frac{7t}{2} \leq -\frac{1}{2}, \\ 3-t \geq 2, \end{cases}$  解得  $\frac{7-\sqrt{41}}{4} \leq$

$t \leq 1$ ,

即实数  $t$  的取值范围是  $\left[\frac{7-\sqrt{41}}{4}, 1\right]$ .

**8. 【解】**(1) 因为  $f(x) = \frac{ax+b}{9-x^2}$  是定义在  $(-3, 3)$  上的偶函数, 所以

$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{ax+b}{9-x^2} = \frac{-ax+b}{9-x^2} \Rightarrow ax=0$ , 即  $ax=0$  对于  $x \in$

$(-3, 3)$  恒成立, 故只需  $a=0$ , 即  $f(x) = \frac{b}{9-x^2}$ . 又因为  $f(1) = \frac{1}{4}$ ,

拆逻辑: 取值不受  $x$  的影响, 即令  $x$  的系数为 0

所以  $\frac{b}{9-1^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow b=2$ , 所以  $a=0, b=2$ .

(2) 由 (1) 可知  $a=0, b=2$ , 即  $f(x) = \frac{2}{9-x^2}$ , 该函数在  $(0, 3)$  上

单调递增, 理由如下:

$\forall x_1, x_2 \in (0, 3)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{9-x_1^2} - \frac{2}{9-x_2^2} =$

$\frac{2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{(9-x_1^2)(9-x_2^2)}$ . 因为  $0 < x_1 < x_2 < 3$ , 所以  $x_1+x_2 > 0, x_1-x_2 <$

$0, 9-x_1^2 > 0, 9-x_2^2 > 0$ , 因此  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 所以  $f(x_1) < f(x_2)$ , 因此函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上单调递增.

(3) 因为函数  $f(x) = \frac{2}{9-x^2}$  是定义在  $(-3, 3)$  上的偶函数, 所以

由  $f(t-2) - f(1-4t) < 0 \Rightarrow f(t-2) < f(1-4t) \Rightarrow f(|t-2|) < f(|1-4t|)$ .

又因为函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上单调递增,

所以  $\begin{cases} -3 < t-2 < 3, \\ -3 < 1-4t < 3, \\ |t-2| < |1-4t| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < t < 5, \\ -\frac{1}{2} < t < 1, \\ (t-2)^2 < (1-4t)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{5} < t < 1 \text{ 或 } -\frac{1}{2} <$

$t < -\frac{1}{3}$ , 所以实数  $t$  的取值范围为  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, 1\right)$ .

### 第三章全章训练

**1. D** 【解析】设  $f(x) = x^a$ , 因为幂函数的图象过点  $(8, 2\sqrt{2})$ , 所以  $2\sqrt{2} = 8^a$ , 即  $2^{\frac{3}{2}} = 2^{3a}$ , 所以  $a = \frac{1}{2}$ , 即  $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ , 所以  $f(3) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ . 故选 D.

**2. A** 【解析】由  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 得  $f(-\sqrt{7}) = f(\sqrt{7})$ ,

$f(-3) = f(3)$ .

又  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(\sqrt{7}) < f(3) < f(\pi)$ ,

拆逻辑: 把自变量转化到同一单调区间上再比较大小

所以  $f(\pi) > f(-3) > f(-\sqrt{7})$ . 故选 A.

**3. C** 【解析】由  $2x^2+x-3 \geq 0$ , 解得  $x \geq 1$  或  $x \leq -\frac{3}{2}$ ,

所以函数  $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3}$  的定义域为  $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, +\infty)$ .

⚡ **防区:** 求函数的单调区间之前一定先求函数的定义域

设  $t = 2x^2 + x - 3$ , 则  $y = \sqrt{t}$ .

函数  $t = 2x^2 + x - 3$  图象的对称轴为直线  $x = -\frac{1}{4}$ ,

所以函数  $t = 2x^2 + x - 3$  在区间  $(-\infty, -\frac{3}{2}]$  上单调递减, 在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增, 且  $t \geq 0$ ,

又函数  $y = \sqrt{t}$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{3}{2}]$  上单调递减, 在  $[1, +\infty)$  上单调递增, 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $[1, +\infty)$ . 故选 C.

**4. D 【解析】** 由题图可知函数  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称, 定义域有两个间断点.

对于选项 A: 由  $|x| - 1 \neq 0$ , 解得  $x \neq \pm 1$ , 则  $f(x)$  的定义域为

$\{x | x \neq \pm 1\}$ , 关于原点对称, 且  $f(-x) = \frac{-x}{|-x|-1} = -\frac{x}{|x|-1} = -f(x)$ , 则函数  $f(x)$  为奇函数, 其图象关于原点对称, 排除 A; 对于选项 B: 由  $1-x^2 \neq 0$ , 解得  $x \neq \pm 1$ , 则  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq \pm 1\}$ , 当  $x > 1$  时,  $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}-x}$ , 因为  $y = \frac{1}{x} - x$

在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 排除 B;

对于选项 C: 因为  $|x| + 1 > 0$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 排除 C. 故选 D.

**5. D 【解析】** 因为  $g(x) = f(x+a) - b$  为奇函数,  $f(x) = x^3 - 6x^2$ ,

所以  $f(x+a) - b + f(-x+a) - b = 0$ ,

所以  $(x+a)^3 - 6(x+a)^2 - b + (-x+a)^3 - 6(-x+a)^2 - b = 0$ ,

所以  $(x+a)^3 - 6(x+a)^2 - b - (x-a)^3 - 6(x-a)^2 - b = 0$ ,

所以  $(6a-12)x^2 + 2a^3 - 12a^2 - 2b = 0$ ,

所以  $\begin{cases} 6a-12=0, \\ 2a^3-12a^2-2b=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a=2, \\ b=-16. \end{cases}$  故选 D.

**6. C 【解析】** 由题意知, 对任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$  ( $x_1 \neq$

$x_2$ ), 有  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ , 故函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递

增. 又  $f(x+1)$  是偶函数, 即  $f(x+1) = f(-x+1)$ , 则函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 故函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调

递减. 又  $f(m+1) \geq f(2m)$ , 所以  $|m+1-1| \geq |2m-1|$ , 不等式两边平方后解得  $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ . 故选 C.

**7. A 【解析】** 因为  $f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ , 所以  $f(x)$  在  $[-2, -1]$  上单调递减, 在  $(-1, 0]$  上单调递增, 又  $f(-2) = f(0) = 0$ ,  $f(-1) = -1$ , 所以函数  $f(x)$  在区间  $[-2, 0]$  上的值域为  $[-1, 0]$ . 对任意的  $x_1 \in [-2, 0]$ , 存在  $x_2 \in [-2, 1]$ , 使得

$f(x_1) = h(x_2)$  等价于  $f(x)$  在  $[-2, 0]$  上的值域  $[-1, 0]$  是  $h(x)$  在  $[-2, 1]$  上的值域的子集. 当  $k=0$  时,  $h(x) = -1$  显然不符合题意; 当  $k > 0$  时,  $h(x)$  在  $[-2, 1]$  上的值域为  $[h(-2), h(1)] = [-2k-1, k-1]$ , 则  $-2k-1 \leq -1$  且  $k-1 \geq 0$ , 解

⚡ **拆逻辑:** 当  $k > 0$  时,  $k$  的值已经决定了  $-2k-1$  和  $k-1$  的大小, 不需要再单独列不等式

得  $k \geq 1$ ; 当  $k < 0$  时,  $h(x)$  在  $[-2, 1]$  上单调递减, 值域为  $[h(1), h(-2)] = [k-1, -2k-1]$ , 则  $k-1 \leq -1$  且  $-2k-1 \geq 0$ , 解得  $k \leq -\frac{1}{2}$ .

综上, 实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ , 故选 A.

**8. D 【解析】** 若  $x < -1$ , 则  $[x] \leq -2$ , 即  $[x] + 2 \leq 0$ , 又  $|2x+1| > 0$ , 此时不等式  $|2x+1| \leq [x] + 2$  无解.

若  $-1 \leq x < 0$ , 则  $[x] = -1$ , 由  $|2x+1| \leq [x] + 2$ , 得  $|2x+1| \leq 1$ , 解得  $-1 \leq x \leq 0$ , 所以  $-1 \leq x < 0$ .

若  $0 \leq x < 1$ , 则  $[x] = 0$ , 由  $|2x+1| \leq [x] + 2$ , 得  $|2x+1| \leq 2$ , 解得  $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , 所以  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

若  $1 \leq x < 2$ , 则  $[x] = 1$ , 由  $|2x+1| \leq [x] + 2$ , 得  $|2x+1| \leq 3$ , 解得  $-2 \leq x \leq 1$ , 此时  $x = 1$ .

若  $x \geq 2$ , 可知  $[x] + 2 \leq x + 2$ , 而  $|2x+1| = 2x+1$ , 由  $2x+1 \leq x+2$ , 得  $x \leq 1$ , 无解, 所以  $x \geq 2$  时, 不等式  $|2x+1| \leq [x] + 2$  无解.

综上所述, 原不等式的解集为  $[-1, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ . 故选 D.

**9. BC 【解析】** 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的定义域是  $(-\infty, 0) \cup (0,$

$+\infty)$ , 关于原点对称, 又  $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ , 所以函数

$f(x) = \frac{1}{x}$  为奇函数, A 不符合题意;

函数  $f(x) = |x|$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 关于原点对称, 且  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ , 所以函数  $f(x) = |x|$  为偶函数, 且当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) = |x| = x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, B 符合

题意; 函数  $f(x) = x^2$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ , 所以函数  $f(x) = x^2$  为偶函数, 且  $f(x) = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, C 符合题意.

因为函数  $f(x) = \sqrt{x}$  的定义域是  $[0, +\infty)$ , 不关于原点对称, 所以函数  $f(x) = \sqrt{x}$  无奇偶性, D 不符合题意. 故选 BC.

**10. ACD 【解析】** A 选项, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$ , 故当  $0 \leq x < 2$  时,  $f(x)$  单调递增, 当  $x \geq 2$  时,  $f(x)$  单调递减, 又  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以当  $x \leq -2$  时,  $f(x)$  单调递增, 综上,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -2]$  和  $[0, 2]$ , A 正确;

B 选项, 由 A 选项可知, 当  $x \geq 2$  时,  $f(x)$  单调递减, 所以

$f(-\pi)=f(\pi)>f(5)$ , B 错误;

C 选项, 由 A 选项可知,  $f(x)$  在  $(-\infty, -2]$  和  $[0, 2]$  上单调递增, 在  $(-2, 0)$  和  $(2, +\infty)$  上单调递减,

故当  $x=-2$  和  $x=2$  时,  $f(x)$  取得最大值, 最大值为  $f(2)=-(-2-2)^2+4=4$ , C 正确;

D 选项, 当  $x<0$  时,  $-x>0$ , 故  $f(x)=f(-x)=-4x-(-x)^2=-4x-x^2$ , D 正确.

故选 ACD.

**11. ABD** 【解析】在  $f(x+y)+f(x)f(y)=xy$  中, 令  $x=1, y=0$ , 则

拆逻辑: 一般

都先从特殊值开始找抽象函数的函数值或判断函数的性质

$f(1)+f(1)f(0)=0$ , 因为  $f(1)\neq 0$ , 所以  $f(0)=-1$ . 令  $x=1, y=-1$ , 得  $f(0)+f(1)f(-1)=-1$ , 又  $f(0)=-1$ , 则  $f(1)f(-1)=0$ , 因为  $f(1)\neq 0$ , 所以  $f(-1)=0$ , 故 A 正确; 令  $y=-1$ , 则  $f(x-1)+f(x)f(-1)=-x$ , 又  $f(-1)=0$ , 所以  $f(x-1)=-x$ , 则  $f(x)=-x-1$ , 则  $f(2\ 025)=-2\ 026$ , 故 B 正确;  $f(x+2)=-x-3$  不是奇函数, 故 C 错误;  $f((x+2\ 026)^2)=-x+2\ 026^2-1$ , 最大值为  $-1$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

**高手视角** 抽象函数赋值常用  $0, 1, -1$  等.

**12.  $x^2+1$  (答案不唯一)** 【解析】由题设可知,  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$ , 值域为  $[1, +\infty)$  的偶函数, 所以  $f(x)=x^2+1$  满足.

**13.**  $\begin{cases} x^2+4x, x\geq 0, \\ x^2-4x, x<0 \end{cases}$  【解析】因为  $f(\sqrt{x})=x+4\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{x}\geq 0$ , 所以当  $x\geq 0$  时,  $f(x)=x^2+4x$ .

因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数,

所以当  $x<0$  时,  $-x>0$ ,  $f(x)=f(-x)=(-x)^2+4\cdot(-x)=x^2-4x$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的解析式为  $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, x\geq 0, \\ x^2-4x, x<0. \end{cases}$

**14.  $\{x|-3<x\leq -2 \text{ 或 } -1<x<0 \text{ 或 } 1<x\leq 2\}$**  【解析】将不等式

$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$  转化为  $f(x)g(x)\geq 0$  且  $g(x)\neq 0$ . 由题图可知, 在  $[0, 3]$  上满足此不等式的解集为  $\{x|1<x\leq 2\}$ .

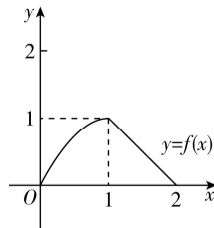
$\because y=f(x)$  是定义在  $[-3, 3]$  上的偶函数,  $y=g(x)$  是定义在  $[-3, 3]$  上的奇函数,  $\therefore f(x)g(x)$  是奇函数, 故在  $[-3, 0)$  上, 满

足不等式  $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$  的解集为  $\{x|-3<x\leq -2 \text{ 或 } -1<x<0\}$ .

故不等式  $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$  在  $[-3, 3]$  上的解集是  $\{x|-3<x\leq -2 \text{ 或 } -1<x<0 \text{ 或 } 1<x\leq 2\}$ .

**15. 【解】**(1) 作出函数  $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2, x\in[0, 1], \\ -x+2, x\in[1, 2] \end{cases}$  的图象如图

所示.



$$(2) f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}, f\left(1 + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(1 + \frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{4} + 2 = \frac{1}{4}.$$

(3) 因为  $m\in[0, 1]$ , 所以  $f(m)=2m-m^2=n-1$ , 即  $n=-m^2+2m+1=-(m-1)^2+2$ .

又因为  $m\in[0, 1]$ , 所以  $n\in[1, 2]$ ,

重点: 只有准确判断出  $n$  的范围, 才能得到  $f(n)$

$$\text{即 } m = 1 - \frac{3}{2}f(n) = 1 - \frac{3}{2}(-n+2) = \frac{3}{2}n - 2.$$

$$\text{所以 } \frac{3}{2}(-m^2+2m+1) - 2 = m \Rightarrow 3m^2 - 4m + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{3} \text{ 或 } m = 1. \text{ 因为 } m\in[0, 1], \text{ 所以 } m = \frac{1}{3}.$$

**16. 【解】**(1)  $f(x)-2f(-x)=3x+2$  ①,

将  $x$  换成  $-x$  得  $f(-x)-2f(x)=-3x+2$  ②,

$$\text{②} \times 2 + \text{①}, \text{ 得 } -3f(x) = -3x + 6,$$

$$\text{故 } f(x) = x - 2.$$

(2)  $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 理由如下:

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}, \text{ 设 } x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2,$$

$$\text{则 } g(x_1) - g(x_2) = x_1 - 2 - \frac{1}{x_1} - x_2 + 2 + \frac{1}{x_2} = x_1 - x_2 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right),$$

$$\text{因为 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 - x_2 < 0, 1 + \frac{1}{x_1 x_2} > 0,$$

$$\text{所以 } g(x_1) - g(x_2) = (x_1 - x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2}\right) < 0, \text{ 即 } g(x_1) < g(x_2),$$

$$\text{所以 } g(x) = x - 2 - \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

**17. 【解】**(1) 由题意,  $L(x) = 18y - x - 3x =$

$$\begin{cases} 18\left(4 - \frac{2}{x+1}\right) - 4x, 0 \leq x \leq 6, \\ 18\left(-\frac{1}{18}x^2 + x + \frac{1}{36}\right) - 4x, 6 < x \leq 10, \end{cases}$$

$$\text{即 } L(x) = \begin{cases} 72 - \frac{36}{x+1} - 4x, 0 \leq x \leq 6, \\ -x^2 + 14x + \frac{1}{2}, 6 < x \leq 10. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } 0 \leq x \leq 6 \text{ 时}, 1 \leq x+1 \leq 7, L(x) = 72 - \frac{36}{x+1} - 4x = 76 -$$

$\left[ \frac{36}{x+1} + 4(x+1) \right] \leq 76 - 2\sqrt{\frac{36}{x+1} \cdot 4(x+1)} = 52$ , 当且仅当  $\frac{36}{x+1} = 4(x+1)$ , 即  $x=2$  时, 等号成立, 所以当  $x=2$  时,  $L(x)$  取得最大值 52;

当  $6 < x \leq 10$  时,  $L(x) = -x^2 + 14x + \frac{1}{2} = -(x-7)^2 + 49.5$ , 所以当  $x=7$  时,  $L(x)$  取得最大值, 最大值为  $L(7) = 49.5 < 52$ , 所以当投入的肥料费用为 2 百元时, 该梨树获得的利润最大, 最大利润是 52 百元.

**18. 【解】**(1) 因为  $f(x)$  为幂函数, 所以  $m^2 - m - 1 = 1$ , 解得  $m = -1$  或  $m = 2$ ,

故  $f(x) = x^2$  或  $f(x) = x^{-1}$ .

(2) 当  $f(x) = x^2$  时,  $f(x)$  的图象经过坐标原点, 不满足要求. 当  $f(x) = x^{-1}$  时,  $f(x)$  的图象不经过坐标原点, 所以  $f(x) = x^{-1}$ .  $f(x)$  为奇函数, 证明如下:

$f(x) = x^{-1}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 关于原点对称,  $f(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1} = -f(x)$ ,

所以  $f(x)$  为奇函数.

(3) 若  $f(x)$  的图象经过坐标原点, 则  $f(x) = x^2$ ,

由  $f(2-x) > f(x)$  可得  $(2-x)^2 > x^2$ , 解得  $x < 1$ ,

所以原不等式的解集为  $(-\infty, 1)$ .

**19. 【解】**(1) 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 所以  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$ ,

由  $f(x)$  为偶函数知,  $f(x) = f(-x) = \frac{x^2}{1-x}$ ,

所以当  $x < 0$  时,  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ .

(2)  $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  且  $x_1 < x_2$ , 有

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1^2}{1+x_1} - \frac{x_2^2}{1+x_2} = \frac{x_1^2 + x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 - x_2^2 \cdot x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} \\
 &= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 \cdot x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_1 x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

根据  $x_2 > x_1 \geq 0$ , 可得  $1+x_1 > 0$ ,  $1+x_2 > 0$ ,  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 + x_2 + x_1 x_2 > 0$ ,

所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ ,

所以函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上单调递增.

(3) 由函数  $f(x)$  为偶函数知  $f(ax-1) < f((a-1)x)$  等价于  $f(|ax-1|) < f(|(a-1)x|)$ ,

**图重点:** 偶函数的函数值比较大小, 可先在自变量中加上绝对值

又由(2)知函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $|ax-1| < |(a-1)x|$ , 所以  $|ax-1|^2 < |(a-1)x|^2$ ,

即  $(x-1)[(2a-1)x-1] < 0$ .

(i) 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 不等式可化为  $x-1 > 0$ , 解得  $x > 1$ ,

此时原不等式的解集为  $(1, +\infty)$ ;

(ii) 当  $a < \frac{1}{2}$  时,  $2a-1 < 0$ , 令  $(x-1)[(2a-1)x-1] = 0$ , 得  $x_1 =$

$$1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 > x_2,$$

此时原不等式的解集为  $(-\infty, \frac{1}{2a-1}) \cup (1, +\infty)$ ;

(iii) 当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时,  $0 < 2a-1 < 1$ , 令  $(x-1)[(2a-1)x-1] =$

**拆逻辑:** 分类讨论解不等式

0, 得  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2a-1}, x_1 < x_2$ ,

此时原不等式的解集为  $(1, \frac{1}{2a-1})$ .

综上, 当  $a < \frac{1}{2}$  时, 原不等式的解集为  $(-\infty, \frac{1}{2a-1}) \cup (1, +\infty)$ ;

当  $a = \frac{1}{2}$  时, 原不等式的解集为  $(1, +\infty)$ ;

当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时, 原不等式的解集为  $(1, \frac{1}{2a-1})$ .

## 专练 1 新定义、新情境专练

**1. C 【解析】**对于①, 设集合  $A = \{0\}$ , 显然  $0+0=0$ , 符合性质一, 同时也符合性质二, 因此集合  $A = \{0\}$  是一个“群”, 但它是有限集, 故①不正确.

对于②, 根据“群”的性质, 由  $b \in A$  可得  $-b \in A$ , 因此可得  $a-b \in A$ , 故②正确.

对于③, 根据性质一和性质二, 可知  $A \cap B$  中必定有一个元素为 0, 设  $A \cap B = C$ , 则  $C$  一定不为空集. 若  $c \in C$ , 则一定有  $c \in A, c \in B$ , 因为  $A, B$  都是“群”, 所以  $-c \in A, -c \in B$ ,

因此  $-c \in C$ , 此时  $c - c = 0 \in C$ . 若  $d \in C$ , 则一定有  $d \in A, d \in B$ , 则  $c+d \in A, c+d \in B$ , 所以  $c+d \in C$ , 所以集合  $C$  为一个“群”, 故③正确.

故选 C.

**2.  $\left\{ (4, 1), \left( 6, \frac{2}{3} \right) \right\}$  【解析】**由题可得  $A = B = \{2, 3\}$ ,  $A \oplus B =$

$\left\{ (4, 1), \left( 4, \frac{2}{3} \right), (6, 1), \left( 6, \frac{2}{3} \right) \right\}$ , 因为  $1 = -\frac{1}{6} \times 4 +$